

ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОРТФЕЛЬ МАРКОВИЦА

(МЕТОД ХУАНГА ЛИТЦЕНБЕРГЕРА)

FINANCE TOYS

Метод Хуанга Литценберга позволяет на математически найти эффективное множество портфелей

УСЛОВИЯ

Нет ограничений по позициям в портфеле

Можно открывать как длинные (покупать), так и короткие (продавать) позиции по акциям

Мы используем недельные данные, поэтому ожидаемый доход и риск измеряются за неделю.

ШАГ 1. Загрузить ценовую информацию по акциям

Вначале мы загружаем данные по ценам на акции

В данной модели я использовал акции из четырех различных секторов (чтобы портфель был диверсифицированным)

По построим эффективный портфель по недельным данным. Это означает, что мы попытаемся найти портфель с заданной недельной доходностью и минимальными недельными рисками (минимальное стандартное отклонение)

APPLE			CITI GROUP			GENERAL ELECTRIC			EXXON MOBIL		
26/03/10	230.9		26/03/10	4.31		26/03/10	18.34		26/03/10	66.54	
02/04/10	235.97	2.2%	02/04/10	4.18	-3.0%	02/04/10	18.33	-0.1%	02/04/10	67.61	1.6%
09/04/10	241.79	2.5%	09/04/10	4.55	8.9%	09/04/10	18.52	1.0%	09/04/10	68.76	1.7%
16/04/10	247.4	2.3%	16/04/10	4.56	0.2%	16/04/10	18.97	2.4%	16/04/10	67.93	-1.2%
23/04/10	270.83	9.5%	23/04/10	4.86	6.6%	23/04/10	19.07	0.5%	23/04/10	69.24	1.9%
30/04/10	261.09	-3.6%	30/04/10	4.37	-10.1%	30/04/10	18.86	-1.1%	30/04/10	67.77	-2.1%
07/05/10	235.86	-9.7%	07/05/10	4	-8.5%	07/05/10	16.88	-10.5%	07/05/10	63.7	-6.0%
14/05/10	253.82	7.6%	14/05/10	3.98	-0.5%	14/05/10	17.64	4.5%	14/05/10	63.6	-0.2%
21/05/10	242.32	-4.5%	21/05/10	3.75	-5.8%	21/05/10	16.42	-6.9%	21/05/10	60.88	-4.3%
28/05/10	256.88	6.0%	28/05/10	3.96	5.6%	28/05/10	16.35	-0.4%	28/05/10	60.46	-0.7%
04/06/10	255.965	-0.4%	04/06/10	3.79	-4.3%	04/06/10	15.71	-3.9%	04/06/10	59.525	-1.5%
11/06/10	253.51	-1.0%	11/06/10	3.88	2.4%	11/06/10	15.56	-1.0%	11/06/10	61.86	3.9%
18/06/10	274.074	8.1%	18/06/10	4.01	3.4%	18/06/10	15.95	2.5%	18/06/10	63.1	2.0%
25/06/10	266.7	-2.7%	25/06/10	3.94	-1.7%	25/06/10	14.91	-6.5%	25/06/10	59.1	-6.3%
02/07/10	246.94	-7.4%	02/07/10	3.79	-3.8%	02/07/10	13.88	-6.9%	02/07/10	56.57	-4.3%
09/07/10	259.62	5.1%	09/07/10	4.04	6.6%	09/07/10	14.95	7.7%	09/07/10	58.78	3.9%
16/07/10	249.9	-3.7%	16/07/10	3.9	-3.5%	16/07/10	14.55	-2.7%	16/07/10	57.96	-1.4%
23/07/10	259.94	4.0%	23/07/10	4.02	3.1%	23/07/10	15.71	8.0%	23/07/10	59.72	3.0%
30/07/10	257.25	-1.0%	30/07/10	4.1	2.0%	30/07/10	16.12	2.6%	30/07/10	59.68	-0.1%
06/08/10	260.091	1.1%	06/08/10	4.06	-1.0%	06/08/10	16.45	2.0%	06/08/10	61.97	3.8%
13/08/10	249.1	-4.2%	13/08/10	3.88	-4.4%	13/08/10	15.38	-6.5%	13/08/10	59.91	-3.3%
20/08/10	249.64	0.2%	20/08/10	3.75	-3.4%	20/08/10	15.03	-2.3%	20/08/10	58.89	-1.7%
27/08/10	241.62	-3.2%	27/08/10	3.76	0.3%	27/08/10	14.71	-2.1%	27/08/10	59.8	1.5%
03/09/10	258.77	7.1%	03/09/10	3.91	4.0%	03/09/10	15.3925	4.6%	03/09/10	61.32	2.5%
10/09/10	263.41	1.8%	10/09/10	3.91	0.0%	10/09/10	15.98	3.8%	10/09/10	61.2	-0.2%
17/09/10	275.37	4.5%	17/09/10	3.95	1.0%	17/09/10	16.29	1.9%	17/09/10	60.78	-0.2%
24/09/10	292.32	6.2%	24/09/10	3.904	-1.2%	24/09/10	16.66	2.3%	24/09/10	61.75	1.6%
01/10/10	282.52	-3.4%	01/10/10	4.09	4.8%	01/10/10	16.36	-1.8%	01/10/10	62.54	1.3%
08/10/10	294.07	4.1%	08/10/10	4.19	2.4%	08/10/10	17.12	4.6%	08/10/10	64.38	2.9%
15/10/10	314.74	7.0%	15/10/10	3.95	-5.7%	15/10/10	16.3	-4.8%	15/10/10	65.19	1.3%
22/10/10	307.47	-2.3%	22/10/10	4.11	4.1%	22/10/10	16.055	-1.5%	22/10/10	66.34	1.8%

ШАГ 2. Найти ожидаемый доход и стандартное отклонение для каждой акции

Ниже вы видите ключевые входные параметры модели

Таблица 1. Ключевые входные параметры

	Ожидаемый доход e	Стандартное отклонение d	Вес w
APPLE	1.1%	4.9%	114.34%
CITI GROUP	-0.1%	4.6%	-9.76%
GENERAL ELEC	-0.3%	4.5%	-124.80%
EXXON MOBIL	0.0%	2.8%	120.21%

столбец w вначале должна быть пустой. Мы заливаем ее в Шаге 11

e - ожидаемая доходность акции. Равна среднему недельному доходу за выбранный период

d - стандартное отклонение акции, которое является измерителем показателя риска. Для его расчета я использую функцию STDEV (детали по данной формуле можно найти в меню помощи Excel)

w - вес (доля) акции в портфеле

Когда мы строим модель в первый раз, необходимо оставить столбец пустой (позже мы ее привяжем к формуле)

ШАГ 3. Рисуем два единичных вектора

Эти вектора нужны нам для промежуточных расчетов

Первый: количество столбцов = 1; количество рядов = 4 (по количеству акций)

Второй: количество столбцов = 4; количество рядов = 1

Все значения в векторе равны 1

Единичный вектор

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ШАГ 4. Рисуем две транспонированные матрицы для ожидаемых доходов и весов

В таблице 1 (Шаг 2) с входными данными есть два столбца: e (ожидаемая доходность) и w (веса)

Простым языком транспонировать значите просто сделать столбцы рядами и наоборот

Так что просто сделайте ссылки и этих двух матриц в таблицу 1

Мы добавляем букву "T" в имена транспонированных матриц, и таким образом мы получаем wT и eT

Транспонированные матрицы

	APPLE	CITI GROUP	GENERAL ELECTRIC	EXXON MOBIL
wT	114.34%	-9.76%	-124.80%	120.21%
eT	1.1%	-0.1%	-0.3%	0.0%

ШАГ 5. Создаем ковариационную матрицу

ШАГ 5

Ковариация определяет зависимость динамики одной акции от другой
В ковариационной матрице мы находим зависимости между всеми акциями
Мы используем функцию КОВАР в excel We use COVAR excel (смотрите помощь в excel, если хотите узнать о функции больше деталей)
Назовем эту ковариационную матрицу V

V	Ковариационная матрица			
	APPLE	CITI GROUP	GENERAL ELECTRIC	EXXON MOBIL
APPLE	0.00234	0.00119	0.00152	0.00084
CITI GROUP	0.00119	0.00206	0.00125	0.00081
GENERAL ELEC	0.00152	0.00125	0.00195	0.00092
EXXON MOBIL	0.00084	0.00081	0.00092	0.00077

ШАГ 6. Определяем риск (стандартное отклонение) портфеля

ШАГ 6

Вот формула дисперсии портфеля (стандартное отклонение в квадрате):
$$\sigma_p^2 = \sum_i w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

(взято из http://en.wikipedia.org/wiki/Modern_portfolio_theory)

В матричной форме эта формула выглядит так $=wT \times V \times w$
В экселе вы можете записать эту формулу так =МУМНОЖ(МУМНОЖ(wT , V), w)

А вот и сам расчет -> 0.00227547

ШАГ 7. Найдем обратную матрицу

ШАГ 7

Далее мы находим матрицу, обратную матрице V matrix (назовем ее матрица V (-1))

В excel мы используем функцию МОБР для этих целей

выделите поле 4 на 4 (эта ваша будущая обратная матрица)
Начинайте вводить формулу (ячейки должны оставаться выделенными: =МОБР(Ковариационная матрица V)
Нажмите Ctrl+Shift+Enter (это важно, чтобы вы нажимали именно комбинации этих клавиш, не просто Enter)

Вот что получается:

V(-1)			
910.94	-112.04	-525.27	-241.54
-112.04	907.61	-230.82	-555.64
-525.27	-230.82	1579.25	-1071.87
-241.54	-555.64	-1071.87	3412.62

ШАГ 8. Определим 4 скалярных величины

ШАГ 8

Для нахождения эффективного портфеля Хуанг и Литценбергер определяют 4 скалярных величины: A, B, C и D

Действие 1. Расчет величины A

$A = uT \times V(-1) \times e$

Во-первых мы перемножаем матрицы uT (единичная матрица) и V(-1) (обратная ковариационная матрица)

Необходимо выделить 4 ячейки в ряд и написать формулу: =МУМНОЖ(матрица V(-1), матрица uT)

Затем нажимаем Ctrl+Shift+Enter

You get this:

uT x V(-1)			
32.09	9.11	-248.72	1543.57

Во-вторых, мы умножаем полученный результат на вектор e (ожидаемые доходности)

В ячейке мы записываем формулу: =МУМНОЖ(результат предыдущих расчетов(uT x V(-1), вектор e (ожидаемые доходности))

Жмем Enter

Вот значение:

A= 1.6461

Действие 2. Расчет величины B

$B = eT \times V(-1) \times e$

Во-первых, мы умножаем вектор eT на матрицу V(-1)

Выделите 4 ячейки в ряду и введите формулу: =МУМНОЖ(V(-1) , eT) и нажмите Ctrl+Shift+Enter

Вот что вы получите:

eT x V(-1)			
11.60	-1.07	-11.27	2.39

Во-вторых, мы умножаем полученный результат (eT*V(-1) на вектор e (ожидаемая доходность)

Выберите ячейку и введите формулу =МУМНОЖ(полученное значение eT x V(-1), вектор e (ожидаемая доходность)) и нажмите Enter

Вот что получается:

B= 0.1649

Действие 3. Расчет величины C

$C = uT \times V(-1) \times u$

Во-первых, мы умножаем матрицу V(-1) на вектор uT (транспонированный единичный вектор)

Выделите 4 ячейки и введите формулу: =МУМНОЖ(V(-1), uT) и нажмите Ctrl+Shift+Enter

Вот результат:

uT x V(-1)			
32.09	9.11	-248.72	1543.57

Во-вторых, мы умножаем полученный результат ($u^T \times V(-1)$) на вектор u (единичный вектор)
 Выберите ячейку и введите формулу: =МУМНОЖ(полученный результат ($u^T \times V(-1)$), вектор u) и нажмите Enter

Вот что вы получите:
 C= 1336.0388

Действие 4. Расчет величины D
 $D=B \times C-A \times A$

Выберите ячейку и введите формулу, подставляя A, B, C: $=B \times C-A \times A$
 D 217.5371

ШАГ 9. Расчет промежуточных коэффициентов m и l

ШАГ 9

Действие 1. Расчет коэффициента m
 $m=V(-1) \times u$

m
32.09
9,11
-248.72
1543.57

Умножаем матрицу $V(-1)$ на вектор u ----->
 Выделите 4 ячейки в столбце и введите формулу: =МУМНОЖ($V(-1)$, u) и нажмите Ctrl+Shift+Enter

Действие 2. Расчет коэффициент l
 $l=V(-1) \times e$

l
11.599
-1.067
-11.271
2.385

Мы умножаем матрицу $V(-1)$ на вектор e ----->
 Выделите 4 ячейки в столбце и введите формулу: =МУМНОЖ ($V(-1)$, e) и нажмите Ctrl+Shift+Enter

ШАГ 10. Расчет координат портфеля

ШАГ 10

g и h являются двумя точками на эффективной границе
 g - это портфель с минимальным ожидаемым доходом
 h - это портфель с максимальным ожидаемым доходом

$g= (B \times m - A \times l) / D$

1	2	3
5.289	19.093	-13.803
1.501	-1.756	3.257
-41.001	-18.553	-22.448
254.457	3.926	250.531

1	2	3
19.093	-1.756	3.257
-18.553	-22.448	250.531
3.926		

1	2	3
-13.803	3.257	-22.448
3.257	-22.448	250.531

4	e	g^*e
APPLE -6.35%	1.1%	-0.07%
CITI GROUP 1.50%	-0.1%	0.00%
GENERAL ELI -10.32%	-0.3%	0.04%
EXXON MOBIL 115.17%	0.0%	0.03%

Доходность портфеля= 0.00%

$h = (C \times l - A \times m) / D$

1	2	3
15496.682	52.816	15443.866
-1425.126	14.989	-1440.115
-15058.901	-409.409	-14649.492
3186.568	2540.827	645.741

1	2	3
52.816	14.989	-1440.115
14.989	-409.409	-14649.492
-409.409	2540.827	645.741

1	2	3
15443.866	-1440.115	-14649.492
-1440.115	-14649.492	645.741

4	e	h^*e
APPLE 70.99	1.1%	0.764
CITI GROUP -6.62	-0.1%	0.004
GENERAL ELECT -67.34	-0.3%	0.232
EXXON MOBIL 2.97	0.0%	0.001

Доходность портфеля= 100%

ШАГ 11. Находим эффективный портфель для заданной доходности

ШАГ 11

Введите ожидаемую доходность портфеля
 Совет: пусть эта цифра будет не слишком большой, иначе вам придется увеличить леверидж

Portfolio return= 1.7%

Доходность портфеля	g	h	h^*T	$g + h^*T = w$
1.70%	-6.3%	7099.4%	120.7%	114.3%
1.70%	1.5%	-662.0%	-11.3%	-9.8%
1.70%	-10.3%	-6734.3%	-114.5%	-124.8%
1.70%	115.2%	296.8%	5.0%	120.2%
				100.0%

Это транспонированная матрица w . Просто сделайте ряд из столбца w^T

w^T	114.3%	-9.8%	-124.8%	120.2%
-------	--------	-------	---------	--------

Here are the weights of the stocks in the efficient portfolio

ОЧЕНЬ ВАЖНО!
 Сделайте ссылки из столбца $g + h^*T = w$ в столбец w (веса) в таблице 1, ШАГ 2

Расчет риска портфеля
 Для нахождения риска мы должны перемножить три матрицы: V , w и w^T
 Выберите ячейку и введите формулу: =МУМНОЖ(МУМНОЖ(w^T , V), w) и нажмите Enter

Риск портфеля= 0.23%

ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОРТФЕЛЬ	
APPLE	114.3%
CITI GROUP	-9.8%
GENERAL ELECTRIC	-124.8%
EXXON MOBIL	120.2%

Доходность портфеля= 1.70%
 Риск портфеля= 0.23%

ШАГ 12. Расчет эффективного портфеля с заданным количеством денег

ШАГ 12

Введите количество денег в вашем портфеле

Деньги= 150,000.00 \$

Компания	Доля в портфеле (%)	Доля в портфеле (\$)	Последняя цена (\$)	Количество акций	Позиция
APPLE	114.3%	171,517	307.47	558	long
CITI GROUP	-9.8%	-14,635	4.11	-3,561	short
GENERAL ELEC	-124.8%	-187,202	16.055	-11,660	short
EXXON MOBIL	120.2%	180,320	66.34	2,718	long

ШАГ 13. Рисование эффективной границы

ШАГ 13

Рисование эффективной границы, используя метод Хуанга Литценберга, в excel достаточно просто. Нам просто необходимо сделать несколько итераций, чтобы найти точки на эффективной кривой

Чтобы найти несколько точек (координат) мы берем нашу заданную доходность портфеля, делим ее на 10 и умножаем на 1, 2, 3

На самом деле можно брать любое значение доходности портфеля. Мы применяем вышеописанный механизм просто для удобства

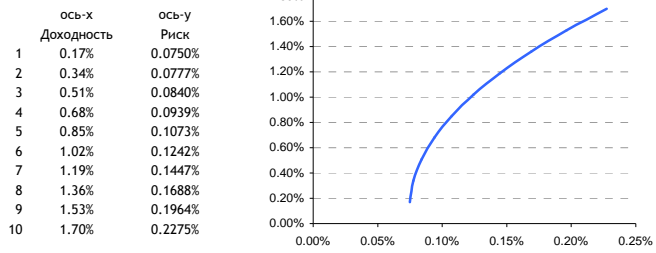
Точка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ожидаемая доходность	0.2%	0.3%	0.5%	0.7%	0.9%	1.0%	1.2%	1.4%	1.5%	1.7%

Затем мы делаем вычисления из ШАГа 11 для всех точек

Ожидаемая доходность	T	g	h	h*T	g + hT	wT	Риск
0.17%	0.17%	-6.3%	7099.4%	12.1%	5.7%	5.7%	0.0750%
0.17%	0.17%	1.5%	-662.0%	-1.1%	0.4%		
0.17%	0.17%	-10.3%	-6734.3%	-11.4%	-21.8%		
0.17%	0.17%	115.2%	296.8%	0.5%	115.7%		
					100.0%		
0.34%	0.34%	-6.3%	7099.4%	24.1%	17.8%	17.8%	0.0777%
0.34%	0.34%	1.5%	-662.0%	-2.3%	-0.8%		
0.34%	0.34%	-10.3%	-6734.3%	-22.9%	-33.2%		
0.34%	0.34%	115.2%	296.8%	1.0%	116.2%		
					100.0%		
0.51%	0.51%	-6.3%	7099.4%	36.2%	29.9%	29.9%	0.0840%
0.51%	0.51%	1.5%	-662.0%	-3.4%	-1.9%		
0.51%	0.51%	-10.3%	-6734.3%	-34.3%	-44.7%		
0.51%	0.51%	115.2%	296.8%	1.5%	116.7%		
					100.0%		
0.68%	0.68%	-6.3%	7099.4%	48.3%	41.9%	41.9%	0.0939%
0.68%	0.68%	1.5%	-662.0%	-4.5%	-3.0%		
0.68%	0.68%	-10.3%	-6734.3%	-45.8%	-56.1%		
0.68%	0.68%	115.2%	296.8%	2.0%	117.2%		
					100.0%		
0.85%	0.85%	-6.3%	7099.4%	60.3%	54.0%	54.0%	0.1073%
0.85%	0.85%	1.5%	-662.0%	-5.6%	-4.1%		
0.85%	0.85%	-10.3%	-6734.3%	-57.2%	-67.6%		
0.85%	0.85%	115.2%	296.8%	2.5%	117.7%		
					100.0%		
1.020%	1.020%	-6.3%	7099.4%	72.4%	66.1%	66.1%	0.1242%
1.020%	1.020%	1.5%	-662.0%	-6.8%	-5.3%		
1.020%	1.020%	-10.3%	-6734.3%	-68.7%	-79.0%		
1.020%	1.020%	115.2%	296.8%	3.0%	118.2%		
					100.0%		
1.19%	1.19%	-6.3%	7099.4%	84.5%	78.1%	78.1%	0.1447%
1.19%	1.19%	1.5%	-662.0%	-7.9%	-6.4%		
1.19%	1.19%	-10.3%	-6734.3%	-80.1%	-90.5%		
1.19%	1.19%	115.2%	296.8%	3.5%	118.7%		
					100.0%		
1.36%	1.36%	-6.3%	7099.4%	96.6%	90.2%	90.2%	0.1688%
1.36%	1.36%	1.5%	-662.0%	-9.0%	-7.5%		
1.36%	1.36%	-10.3%	-6734.3%	-91.6%	-101.9%		
1.36%	1.36%	115.2%	296.8%	4.0%	119.2%		
					100.0%		
1.53%	1.53%	-6.3%	7099.4%	108.6%	102.3%	102.3%	0.1964%
1.53%	1.53%	1.5%	-662.0%	-10.1%	-8.6%		
1.53%	1.53%	-10.3%	-6734.3%	-103.0%	-113.4%		
1.53%	1.53%	115.2%	296.8%	4.5%	119.7%		
					100.0%		
1.70%	1.70%	-6.3%	7099.4%	120.7%	114.3%	114.3%	0.2275%
1.70%	1.70%	1.5%	-662.0%	-11.3%	-9.8%		
1.70%	1.70%	-10.3%	-6734.3%	-114.5%	-124.8%		
1.70%	1.70%	115.2%	296.8%	5.0%	120.2%		
					100.0%		

100.0%

А вот и наша эффективная граница



А вот и все результаты модели

Доходность портфеля= 3.00%
Риск портфеля= 0.23%

Количество денег= 150,000

Эффективный портфель

Компания	Доля (%)	Доля (\$)	Количество акций	Позиция
APPLE	114.3%	171,517	558	long
CITI GROUP	-9.8%	-14,635	-3,561	short
GENERAL ELECTRIC	-124.8%	-187,202	-11,660	short
EXXON MOBIL	120.2%	180,320	2,718	long

